НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ.

ЛЕКЦИЯ 4

2.3 Изображение процессов в фазовом пространстве

Известно, что основной характеристикой качества управления для линейных систем является переходная функция. Вид этой функции не зависит от амплитуды сигнала и начальной точки, в которой находится система. Однако для нелинейных систем реакция на ступеньку другой амплитуды или из другой начальной точки пространства состояний может иметь разный характер. Система может быть устойчивой в одной точке и неустойчивой в другой. Поэтому наибольший интерес представляют характеристики и методы, позволяющие исследовать общие (групповые) свойства нелинейной системы. Одним из таких приемов является изображение процессов в фазовом пространстве. Что это такое?

Мы ранее говорили о том, что каждый элемент системы, представленной в пространстве состояний, полностью определяет состояние этой системы. В ранее рассмотренной системе (2.17)

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}, u, t)$$

таким элементом является вектор $\vec{x}$ решения этой системы в фиксированный момент времени ***t*.**

Этому элементу в пространстве состояний соответствует точка. Действительно, при заданном $\vec{x}(0)$ каждому моменту времени *t* соответствует свой набор $\vec{x}$, то есть в координатах $\vec{x}$ каждому моменту времени *t* соответствует определенная точка. Эта точка называется изображающей точкой.

Итак: *Точка в пространстве состояний, соответствующая вектору состояний системы в данный момент времени, называется изображающей точкой.*

При изменении времени вектор состояний $\vec{x}$, согласно решению дифференциального уравнения, изменяется. Это можно интерпретировать, как перемещение изображающей точки в пространстве *x*.

Перемещающаяся изображающая точка даст в координатах кривую, называемую фазовой траекторией. Каждому начальному значению $\vec{x}(0)$ соответствует своя фазовая траектория. Таким образом, *фазовой траекторией системы называется кривая в пространстве* $\vec{x}$, *соответствующая решению дифференциального уравнения с начальным значением* $\vec{x}(0)$, *каждая точка кривой соответствует определенному моменту времени t.*

Если мы возьмем разные начальные значения $\vec{x}(0)$, то каждому из них соответствует своя фазовая траектория. Их совокупность называется фазовым портретом системы.

Таким образом, *фазовым портретом системы называется множество фазовых траекторий при разных начальных значениях* $\vec{x}(0)$.

Когда в пространстве состояний рассматривают фазовые траектории, то такое пространство также называют фазовым пространством.

На фазовой траектории время в явном виде отсутствует. Поскольку представляет интерес развитие процессов во времени, то, чтобы отразить ход времени, на фазовой траектории стрелкой указывают направление движения изображающей точки при возрастании времени.

В некоторых местах фазового пространства исследуемая система находится в равновесном, или установившемся состоянии, то есть система не изменяет своего состояния. Это значит, что производная по времени от вектора состояния равна нулю. Тогда для автономной системы (2.19) получаем

$$\vec{f}(\vec{x}) = 0, \tag{2.20}$$

Точки, в которых соблюдается условие (2.20), называются особыми точками. Координаты особых точек находятся путем решения алгебраического уравнения (2.20). Эти точки имеют большое значение при исследовании систем. Представляет интерес не только координаты особых точек, но и поведение системы в области особых точек. В зависимости от этого поведения особые точки разделяются на несколько типов: фокус, узел, седло и центр. Фокус и узел могут быть устойчивыми или неустойчивыми, седло всегда неустойчиво, узел находится на границе устойчивости. Особые точки также могут заполнять линию, поверхность или гиперповерхность. Итак: *В зависимости от поведения системы в области особых точек эти точки разделяются на фокус, узел, седло и центр. Фокус и узел могут быть устойчивыми или неустойчивыми, седло всегда неустойчиво, узел находится на границе устойчивости*.

Фазовые траектории нелинейных систем могут иметь вид замкнутых кривых. Эти кривые называются предельными циклами. Предельные циклы могут быть устойчивыми и неустойчивыми. К устойчивому предельному циклу стремятся соседние траектории, от неустойчивого цикла они удаляются.

Устойчивые предельные циклы означают периодическое изменение фазовых переенных системы. Итак: *Фазовые траектории в виде замкнутых кривых называются предельными циклами. К устойчивому предельному циклу стремятся соседние траектории, от неустойчивого цикла они удаляются*.

Фазовый портрет полностью характеризует систему и благодаря своей наглядности удобен для исследования нелинейных систем. Особенно фазовый портрет удобен для систем второго порядка, так как фазовый портрет представлен на плоскости. Реже используются фазовые портреты систем третьего порядка, тогда фазовые траектории располагаются в трехмерном пространстве. Сейчас, когда развиты компьютерные технологии моделирования, могут строиться фазовые портреты в пространстве третьего и более высоких порядков, но они не так наглядны, как на плоскости. Рассмотрим фазовые портреты систем второго порядка.

2.4 Изображение процессов на фазовой плоскости

На плоскости изображаются фазовые траектории систем второго порядка. Рассмотрим автономную систему, описываемую дифуравнением второго порядка в пространстве состояний т.е. в фазовом пространстве

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2) \end{aligned} . \tag{2.21}$$

Допустим. что мы нашли решение системы (2.21). Это решение можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \varphi_1(x_1(0), x_2(0), t), \\ x_2(t) &= \varphi_2(x_1(0), x_2(0), t). \end{aligned} \tag{2.22}$$

где $\varphi_1(\cdot)$, $\varphi_2(\cdot)$ - функции, полученные при решении (2.21); $x_1(0), x_2(0)$ - начальные условия.

Уравнения (2.22) задают фазовые траектории в параметрической форме, где t - параметр. Исключая t, находим фазовые траектории в виде функции

$$x_2 = \alpha(x_1, x_1(0), x_2(0)). \tag{2.23}$$

$\alpha(\cdot)$ - функция, полученная при исключении t из (2.22).

Задавая в (2.23) разные $x_1(0), x_2(0)$, мы получаем разные фазовые траектории. Совокупность этих траекторий образует фазовый портрет нашей автономной системы. Напомню, что фазовый портрет – это множество фазовых траекторий при разных начальных значениях $x_1(0),\ x_2(0)$.

Функцию (2.23) можно сразу получить, сразу решая дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{f_2(x_1, x_2)}{f_1(x_1, x_2)} \quad , \tag{2.24}$$

полученное путем деления второго уравнения (2.21) на первое.

Мы говорили о том, что нелинейную систему можно линеаризовать. Это можно сделать, если функции $\vec{f}(\cdot)$ гладкие. Установлено, что если линеаризацию выполнить в особой точке, то поведение полученной линейной системы в области особой точки будет соответствовать поведению исходной нелинейной системы. Итак: *Поведение линеаризованной системы в области особой точки соответствует поведению исходной системы*. Исследовать линейную систему значительно проще, поэтому это свойство используется при анализе нелинейных систем. Рассмотрим особые точки линейной системы второго порядка и выявим зависимость вида особой точки от коэффициентов этого уравнения.

2.5 Исследование поведения линейных систем второго порядка

Уравнение автономной линейной системы второго порядка можно записать в виде

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = 0. \tag{2.25}$$

Обозначая $y = x_1$, $\dot{x}_1 = x_2$, представим (2.25) в фазовом пространстве (в пространстве состояний, см. преобразование уравнения (2.15) в систему (2.16))

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -a_1 x_2 - a_0 x_1. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Запишем уравнения (2.20) для нахождения особых точек для (2.26):

$$\begin{aligned} x_2 &= 0, \\ -a_1 x_2 - a_0 x_1 &= 0, \end{aligned}$$

$$\text{или } x_1 = 0,\ x_2 = 0,$$

то есть имеем одну особую точку в начале координат.

Известно, что решение и, следовательно, фазовый портрет уравнения (2.26) зависят от корней характеристического уравнения

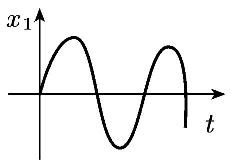
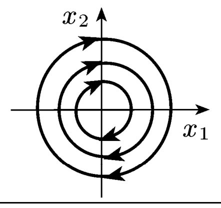
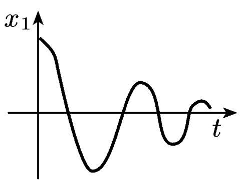
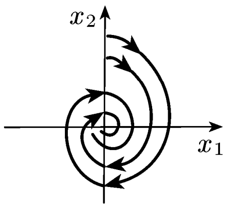
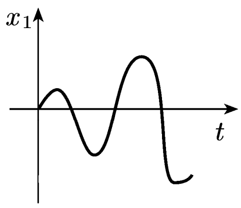
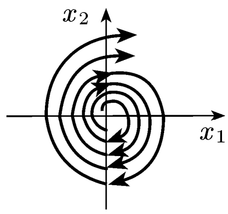
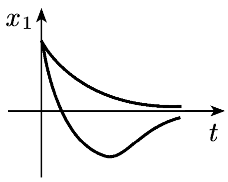
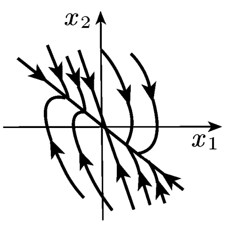
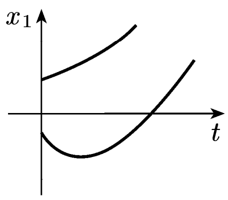
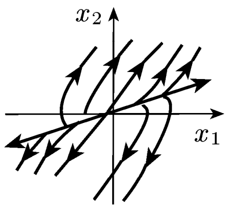
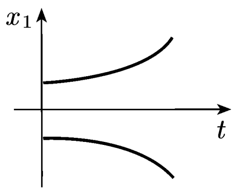
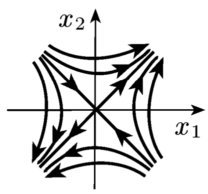
$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad . \tag{2.27}$$

Корни этого уравнения вычисляются по известной формуле $\lambda_{1,2} = \dfrac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2}$.

Эти корни могут быть вещественными, комплексными и мнимыми. В зависимости от вида корней классифицируются особые точки, эта классификация представлена в таблице 2.1 [4].

В этой же таблице приведены характерные кривые переходного процесса и фазовые портреты, соответствующие данным особым точкам.

Таблица 2.1 Классификация особых точек линейной системы второго порядка

Тип корней	Кривая переходного процесса	Фазовый портрет	Тип особой точки
Чисто мнимые			Центр
Комплексные с отрицательной действительной частью			Устойчивый фокус
Комплексные с положительной действительной частью			Неустойчивый фокус
Действительные отрицательные			Устойчивый узел
Действительные положительные			Неустойчивый узел
Действительные разных знаков			Седло